

黏性流中的链环涡管演化与螺旋度分析

熊诗颖 and 杨越

Citation: 中国科学: 物理学 力学 天文学 **50**, 040005 (2020); doi: 10.1360/SSPMA-2019-0092

View online: <http://engine.scichina.com/doi/10.1360/SSPMA-2019-0092>

View Table of Contents: <http://engine.scichina.com/publisher/scp/journal/SSPMA/50/4>

Published by the [《中国科学》杂志社](#)

Articles you may be interested in

[空化螺旋桨非定常粘性流场特征分析](#)

SCIENTIA SINICA Technologica **41**, 213 (2011);

[不同垂向分布特征的垂直黏性系数对经典定常Ekman螺旋结构的影响](#)

SCIENTIA SINICA Terrae **44**, 367 (2014);

[基于约束螺旋理论的机构自由度分析的普遍方法](#)

Science in China Series E-Technological Sciences (in Chinese) **39**, 84 (2009);

[辐射带高能粒子通量演化与宇宙线强度的相关特性分析](#)

SCIENTIA SINICA Terrae **42**, 1063 (2012);

[《功能与智能材料——结构演化与结构分析》](#)

Chinese Science Bulletin **47**, 980 (2002);



黏性流中的链环涡管演化与螺旋度分析

熊诗颖¹, 杨越^{1,2,3*}

1. 北京大学工学院湍流与复杂系统国家重点实验室, 北京 100871;

2. 北京大学应用物理与技术研究中心, 北京 100871;

3. 北京大学工程科学与新兴技术高精尖创新中心, 北京 100871

*联系人, E-mail: yyg@pku.edu.cn

收稿日期: 2019-03-21; 接受日期: 2019-05-06; 网络出版日期: 2019-09-04

国家自然科学基金(编号: 11522215, 91541204, 91841302)资助项目

摘要 本文通过直接数值模拟研究了链环涡管在不可压缩黏性流中的演化过程. 在初始时刻的链环涡管由两个变形的涡环组合而成, 其螺旋度为依赖于涡轴参数方程的解析表达式, 进而可利用该初始流场进行涡管演化研究与螺旋度分析. 发现当初始链环涡管的涡量方向具有相同手性时, 链环涡管和环面纽结涡管的演化具有类似的涡动力学过程; 而当它们具有相反手性时, 涡管间的强涡量梯度会使两涡环在短时间内产生剧烈的涡重联, 从而导致涡环由快速的尺度级串过程达到类湍流状态.

关键词 涡管, 螺旋度分析, 涡动力学

PACS: 47.27.-i, 47.27.Eq, 47.27.Nz, 47.40.Ki, 47.85.Gj

1 引言

螺旋度(以下简称螺度)可表征流场涡线间的拓扑关系^[1,2], 且是理想流动中的守恒量. 但若考虑真实流动中的涡管厚度和黏性耗散, 螺度的意义及演化规律则可能非常复杂. 为分析真实流动中的螺度, 可考虑对有限个孤立涡结构的螺度进行分解^[3]. 即将流场看成有限个孤立的涡结构组成, 而流场的速度场便由这些孤立涡结构的涡量场诱导而成. 此时流场螺度可分为两部分, 即由各涡结构涡量场和自身诱导的速度场作用而成的自螺度, 以及由各涡结构涡量场和其他结构诱导的速度场作用而成的互

螺度. 该分解后得到的互螺度与不同涡结构之间的拓扑关系有关, 而自螺度则仅与涡结构本身的几何形状和涡量分布有关. 如果考虑的涡结构都是闭合的涡管结构, 则相应的互螺度和自螺度具有明确的解析表达式. 粗略地说, 互螺度由涡管相互之间的链接数和沿涡轴的涡通量表征^[4,5], 而自螺度由涡管的环向和极向涡通量函数表征^[3,6,7].

上述螺度分析和涡管结构间的密切联系促使了简单闭合涡管的构造和数值模拟研究^[8-10], 但目前缺乏对复杂链环涡管的相应研究. 主要原因是数值上难以构造精确的细涡管, 以准确模拟复杂涡结构在流场中的演化. 本文利用近期提出的涡管纽结一

引用格式: 熊诗颖, 杨越. 黏性流中的链环涡管演化与螺旋度分析. 中国科学: 物理学 力学 天文学, 2020, 50: 040005

Xiong S Y, Yang Y. Evolution and helicity analysis of linked vortex tubes in viscous flows (in Chinese). *Sci Sin-Phys Mech Astron*, 2020, 50: 040005, doi: [10.1360/SSPMA-2019-0092](https://doi.org/10.1360/SSPMA-2019-0092)

般性构造方法^[11], 构造了一系列链环涡管算例. 这些链环涡管是由两个变形的涡环组成. 基于已有的螺度分解框架, 本文对构造的链环涡管进行了螺度分析, 并对螺度的理论计算公式进行了数值验证. 该验证一方面可以检验理论公式的正确性, 另一方面可以检验数值算法的精确性. 然后我们用直接数值模拟研究了这些链环涡管在黏性流中的演化过程. 总体来说, 这些算例分为两类, 一类是组成链环涡管的涡环具有相同手性的涡量方向, 另一类则是具有相反手性的涡量方向. 如果用涡量强度等值面 (或其他基于速度梯度张量的涡识别方法) 去识别这些涡结构, 则会得到相同的等值面形态, 但不同螺度对应的不同涡管手性会导致演化中完全不同的涡动力学现象.

2 有限个孤立涡管的螺度分析

螺度的定义为

$$H \equiv \int_{\Omega} h d\Omega, \quad (1)$$

其中 Ω 为流场空间, $d\Omega$ 为体积微元, 螺度密度为

$$h \equiv \mathbf{u} \cdot \boldsymbol{\omega}, \quad (2)$$

这里 \mathbf{u} 是速度场, $\boldsymbol{\omega} = \nabla \times \mathbf{u}$ 是涡量场.

当流场由有限个孤立涡管组成, 螺度可以分为自螺度和互螺度^[3]. 设流场可以分为 n 个孤立的以非退化 (曲率处处非零) 闭曲线 C_i ,

$$\mathbf{x} = \mathbf{c}_i(\zeta) \quad (3)$$

为涡轴的涡管结构 Ω_i ($i = 1, 2, \dots, n$), 并设 Ω_i 的涡通量为 Γ_i . 假设 Ω_i 内涡量诱导的无散速度场为 \mathbf{u}_i , 即满足

$$\nabla \times \mathbf{u}_i = \begin{cases} \boldsymbol{\omega}, & \mathbf{x} \in \Omega_i, \\ \mathbf{0}, & \mathbf{x} \notin \Omega_i, \end{cases} \quad (4)$$

则该涡量场螺度 H 可以做如下分解:

$$H = H_s + H_m, \quad (5)$$

其中自螺度为

$$H_s = \sum_{i=1}^n H_{ii}, \quad H_{ii} = \int_{\Omega_i} \mathbf{u}_i \cdot \boldsymbol{\omega} d\Omega, \quad (6)$$

互螺度为

$$H_m = \sum_{i,j=1, i \neq j}^n H_{ij}, \quad H_{ij} = \int_{\Omega_i} \mathbf{u}_j \cdot \boldsymbol{\omega} d\Omega. \quad (7)$$

涡结构 Ω_i 对 Ω_j 的诱导螺度 H_{ij} 可以计算为^[4,5]

$$H_{ij} = \Gamma_i \Gamma_j L_{ij}, \quad (8)$$

其中的高斯环绕积分

$$L_{ij} = \frac{1}{4\pi} \oint_{C_i} \oint_{C_j} \frac{(\mathbf{dc}_i \times \mathbf{dc}_j) \cdot (\mathbf{c}_i - \mathbf{c}_j)}{|\mathbf{c}_i - \mathbf{c}_j|^3} \quad (9)$$

描述了两根涡管的链接数, 在理想流中是一个拓扑不变量.

涡管 Ω_i 对自身的诱导螺度与涡轴曲线的“拧度”和绕轴螺旋涡线有关^[12]. 本文考虑的涡管不包含绕轴螺旋的涡线, 此时涡管 Ω_i 对自身的诱导螺度为^[11]

$$H_{ii} = \Gamma_i^2 W r_i, \quad (10)$$

其中

$$W r_i = \frac{1}{4\pi} \oint_{C_i} \oint_{C_i} \frac{(\mathbf{dc}_i \times \mathbf{dc}'_i) \cdot (\mathbf{c}_i - \mathbf{c}'_i)}{|\mathbf{c}_i - \mathbf{c}'_i|^3} \quad (11)$$

称为闭曲线的拧度. 综合式 (6)–(8), 和 (10), 将式 (5) 重新写为

$$H = \sum_{i=1}^n \Gamma_i^2 W r_i + \sum_{i,j=1, i \neq j}^n \Gamma_i \Gamma_j L_{ij}. \quad (12)$$

3 初始链环涡管的构造

本节我们将构造初始链环涡管. 在先前的纽结涡管研究中我们构造了环面纽结作为初始纽结涡管的中心涡轴^[11]. 为了方便纽结涡管和链环涡管螺度分析和涡动力学分析的对比, 这里仍然构造此类嵌入在环面上的涡管作为数值算例的初始条件. 在本文算例中, 初始链环涡管由两个给定的环面涡环 (即这两个涡环可以嵌入在一个环面上) 组成. 其中第一个涡环的涡轴为参数曲线:

$$\begin{aligned} c_x(\zeta) &= \pi + [1 + 0.5 \cos(q\zeta)] \cos(p\zeta), \\ c_y(\zeta) &= \pi + [1 + 0.5 \cos(q\zeta)] \sin(p\zeta), \\ c_z(\zeta) &= \pi - 1.5 - 0.5 \sin(q\zeta). \end{aligned} \quad (13)$$

第二个涡环的涡轴为将曲线(13)绕直线 $(x, y) = (\pi, \pi)$ 顺时针旋转 π/q 弧度而成. 这里参数 (p, q) 有三种选择, 分别为 $(p, q) = (1, 2), (1, 3), (1, 4)$. 由于该链环涡管由两个涡环组成, 因此链环涡管的涡量方向有两种情况, 分别为两涡环的涡量方向具有相同和相反的手性. 我们将两个涡环涡量具有相同手性的链环涡管记作 $S_{1,2}, S_{1,3}, S_{1,4}$, 而相反手性的链环涡管记作 $D_{1,2}, D_{1,3}, D_{1,4}$. 这六个链环涡管的涡轴几何拓扑参数 Wr 和 L_{12} 列在表1中, 其中 Wr 为涡环中心轴(13)的拧度, 由式(11)计算. 由于组成链环的两个环形闭合曲线具有旋转对称性, 因此两个闭曲线具有相同的拧度, 这里不再用下标区分两个结构的拧度. 而 L_{12} 为组成链环的两根闭曲线相互的链接数, 由式(9)计算. 从表1中可以看出, 组成链环的两个涡环具有不同手性时将改变两涡环之间链接数的正负号, 因此这两组具有不同涡量手性的链环涡管具有显著不同的螺度.

对给定的链环涡轴, 相应的涡量场构造为[11]

$$\boldsymbol{\omega}(\mathbf{x}) = \Gamma f(\rho) \mathbf{T}, \quad (14)$$

这里 \mathbf{x} 是笛卡尔坐标系下的空间坐标位置, $\Gamma=2$ 为沿涡轴的涡通量, ρ 为坐标点 \mathbf{x} 离涡轴的距离, \mathbf{T} 表示过 \mathbf{x} 作涡轴法平面与涡轴相交处的单位切矢量,

$$f(\rho) = \frac{1}{2\pi\sigma^2} \exp\left(-\frac{\rho^2}{2\sigma^2}\right) \quad (15)$$

为涡量在截面的分布函数, 其中 $\sigma = 1/(16\sqrt{2\pi}) \approx 0.025$. 由于涡管的涡量高度集中在涡轴附近, 因此存在 $0 < \epsilon_\rho \ll 1$, 使得对 $f(\rho) > \epsilon_\rho$ 处的 ρ 和 \mathbf{T} 都可由 \mathbf{x} 唯一确定. 忽略 $f(\rho) \leq \epsilon_\rho$ 处的涡量场, 这样确保了定义在 \mathbf{x} 点处的涡量场(14)可唯一确定.

对表1中给定的涡轴和由式(14)确定的涡量场, 我们用文献[11]中的方法进行了数值构造. 具体来说, 在以 $L=2\pi$ 为边长的周期盒子中构造这些涡管, 则相应的速度场可以通过傅里叶变换由涡量场求解:

$$\mathbf{u} = \mathcal{F}^{-1} \left(\frac{\mathbf{i}\mathbf{k} \times \widehat{\boldsymbol{\omega}}}{|\mathbf{k}|^2} \right), \quad (16)$$

其中 \mathcal{F}^{-1} 表示傅里叶逆变换算子, \mathbf{k} 为波数矢量, $\widehat{\boldsymbol{\omega}} = \mathcal{F}(\boldsymbol{\omega})$ 为涡量场 $\boldsymbol{\omega}$ 的傅里叶变换结果. 此外数值计算的网格为 $N^3 = 512^3$.

表1 链环涡管数值构造中的几何与拓扑参数

Table 1 Parameters and geometrical/topological quantities in the numerical construction of six linked vortex tubes

Case	(p, q)	Wr	L_{12}	H	ϵ_H
$S_{1,2}$	(1, 2)	0.57	2	20.54	9.3×10^{-7}
$S_{1,3}$	(1, 3)	1.34	3	34.72	8.4×10^{-7}
$S_{1,4}$	(1, 4)	2.22	4	49.76	3.3×10^{-6}
$D_{1,2}$	(1, 2)	0.57	-2	-11.46	2.0×10^{-6}
$D_{1,3}$	(1, 3)	1.34	-3	-13.28	3.8×10^{-6}
$D_{1,4}$	(1, 4)	2.22	-4	-14.24	2.3×10^{-7}

图1中展示了表1中所列的六个链环涡管的涡量强度等值面 $|\boldsymbol{\omega}| = 40$, 等值面上用螺度密度染色. 由于该涡管的涡量强度等值面是涡面[11,13,14], 在等值面上积分的涡线可完全与等值面贴合, 从而验证了数值构造的准确性.

由于这里构造的涡管不包含涡线绕轴螺旋产生的螺度[11], 因此我们可以利用第2节的方法对流场进行螺度分析. 由于我们构造的链环涡管由两个涡环构成, 且两个涡环具有旋转对称性, 因此计算螺度的式(12)可以简化为

$$H_C = 2\Gamma^2(Wr + L_{12}), \quad (17)$$

这里为了区分通过方程(1)计算的螺度, 用 H_C 来表示由涡轴确定的螺度. 从而我们可以对数值构造的流场定义螺度的偏差

$$\epsilon_H \equiv \frac{|H - H_C|}{|H|}, \quad (18)$$

其中 H 由式(1)数值积分而成, H_C 由式(17)计算. 我们在表1中列出了六组算例的 H 和 ϵ_H , 发现 ϵ_H 约为 10^{-6} 的量级, 定量表明了该链环涡管数值构造非常精确.

4 链环涡管的在黏性流中的演化

4.1 直接数值模拟

对第3节构造的链环涡管, 用直接数值模拟研究其在不可压缩黏性流中的演化. 不可压缩黏性流速度场 $\mathbf{u}(\mathbf{x}, t)$ 的控制方程为Navier-Stokes (NS)方程

$$\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} + (\mathbf{u} \cdot \nabla) \mathbf{u} = -\frac{1}{\rho} \nabla p + \nu \nabla^2 \mathbf{u}, \quad (19)$$

$$\nabla \cdot \mathbf{u} = 0,$$

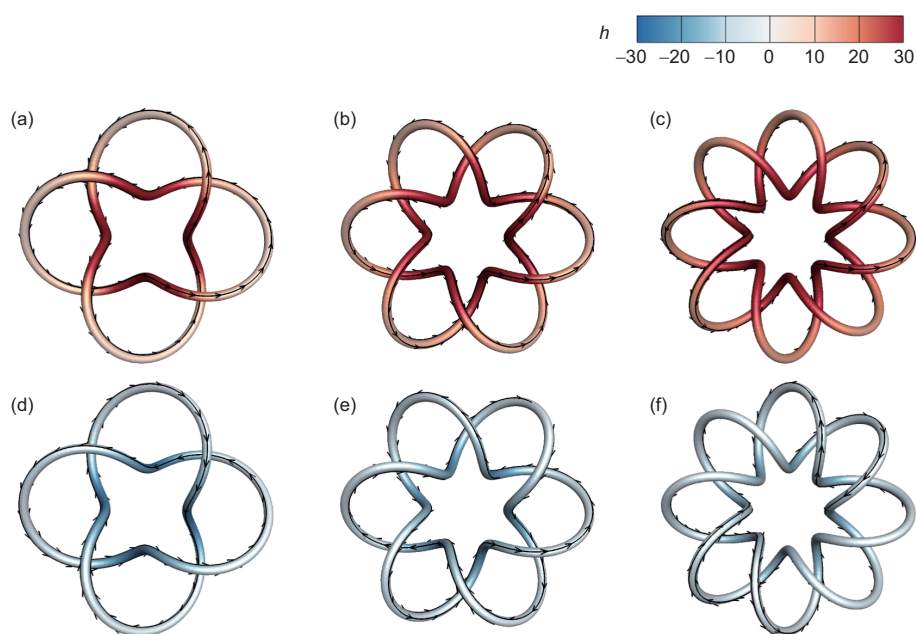


图1 (网络版彩图)链环涡管的涡量强度等值面 $|\omega| = 40$. 所有的等值面用螺度密度染色, 并在其上积分了若干涡线. (a) $S_{1,2}$, (b) $S_{1,3}$, (c) $S_{1,4}$, (d) $D_{1,2}$, (e) $D_{1,3}$, (f) $D_{1,4}$

Figure 1 (Color online) Isosurfaces of $|\omega| = 40$ of initial linked vortex tubes. The isosurfaces are color-coded by the helicity density. Some vortex lines are integrated on the surfaces. (a) $S_{1,2}$, (b) $S_{1,3}$, (c) $S_{1,4}$, (d) $D_{1,2}$, (e) $D_{1,3}$, (f) $D_{1,4}$.

其中 t 是时间, p 是压力, ρ 是密度, ν 是黏性系数.

我们用伪谱法^[15]在以 2π 为边长的周期盒子中求解方程(19). 混淆误差用 $2/3$ 截断法消除, 保证有效的最大波数为 $k_{\max} \approx N/3$. 时间推进方法为二阶 Adams-Bashforth 格式, 其中时间步长足够小使相应的 Courant-Friedrichs-Lewy 数小于 0.5 以满足数值稳定性.

在进行直接数值模拟时, 黏性系数选为 $\nu=0.001$, 即相应的雷诺数为 $Re \equiv \Gamma/\nu=2000$. 所有算例中的空间分辨率 $k_{\max}\eta > 1.9$, 满足解析最小流动尺度的精度要求^[16], 这里 $\eta = (\nu^3/\varepsilon)^{1/4}$ 为 Kolmogorov 尺度, $\varepsilon = \nu \sum_k (|\mathbf{k}|\bar{u})^2$ 为流场的平均耗散率.

4.2 数值结果

通过以表1中列的六组链环涡管为初始条件, 并求解 NS 方程(19), 我们得到这六组链环涡管及其相应的流场参数随时间的演化. 这里展示主要的流场统计规律和相应的涡管几何变形与拓扑变化过程,

并分析流场统计规律和涡动力学之间的关系.

图2和3中分别展示了流场的总能量 $E_{\text{tot}} = \sum_k |\bar{u}|^2/2$ 和平均耗散率随时间的演化, 其中 $\hat{u} = \mathcal{F}(u)$. 总能量在黏性耗散的作用下不断衰减, 其衰减速度和平均耗散率的大小有关. 总的来说, 平均耗散率也是逐渐衰减的, 但有可能出现一些局部的峰值, 这些峰值往往与流场的显著拓扑变换有关, 如涡管重联与链环解开等^[11].

图4展示了流场螺度随时间的演化. 当组成链环涡管的两变形涡环具有相同涡量手性时, 两涡管之间的链接数 L_{12} 为正, 故由式(17)可知该链环涡管的自螺度与互螺度相互叠加, 从而总螺度趋向于有限大正值. 而当组成链环的涡环具有相反的涡量手性时, 两涡管之间的链接数 L_{12} 为负, 此时涡管的自螺度与互螺度相互抵消, 从而总螺度趋向为零. 此外, 螺度在演化过程中可能在一定程度上不随流场结构拓扑变化而改变^[11].

图5和6中分别展示了图1对应的六组链环涡管的涡量强度等值面随时间的演化, 所有的等值面上用螺度密度染色. 对于涡量方向具有相同手性的链

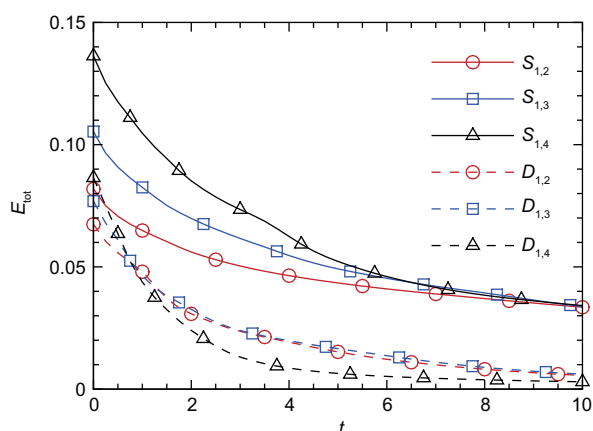


图2 (网络版彩图)链环涡管直接数值模拟中总能量随时间的演化

Figure 2 (Color online) Temporal evolution of the total energy in the direct numerical simulation of six vortex links.

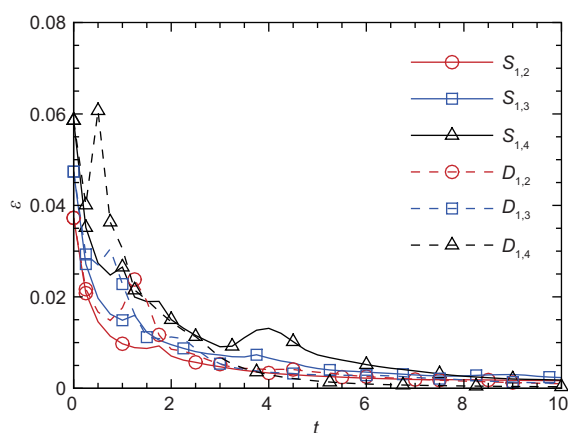


图3 (网络版彩图)链环涡管直接数值模拟中平均耗散率随时间的演化

Figure 3 (Color online) Temporal evolution of the mean dissipation rate in the direct numerical simulation of six vortex links.

环涡管, 即算例中的 $S_{1,2}$, $S_{1,3}$, 和 $S_{1,4}$, 这些链环涡管的演化过程和环面纽结涡管的演化过程类似^[11]. 其相应的动力学过程包括链环涡管的解开、小涡环的分离不同涡环轴向上的“蛙跳”穿越等. 从而也可以看出, 虽然纽结涡管和链环涡管具有不同的拓扑结构, 即不同的连通性, 但这种拓扑性质的差异对涡管的动力学演化并没有产生显著的影响. 在整体一致的涡动力学过程下, 这些涡管演化的差异和他们由式(17)定义的涡轴螺度是相对应的. 即对涡轴螺度较小的流动, 这些涡链环的解开与重联等特征涡动

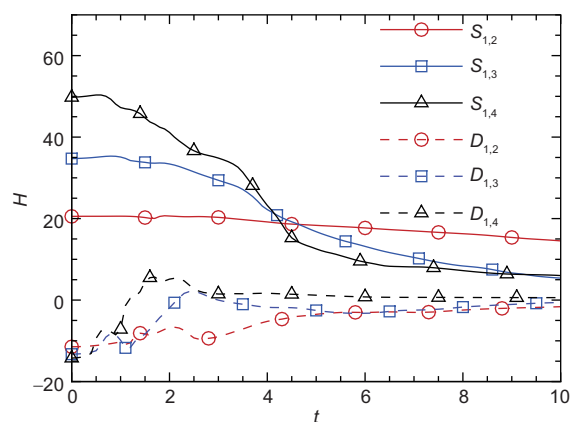


图4 (网络版彩图)链环涡管直接数值模拟中螺度随时间的演化

Figure 4 (Color online) Temporal evolution of the helicity in the direct numerical simulation of six vortex links.

力学过程的发生时间往往滞后.

而当初始涡量方向具有相反手性的链环涡管演化规律则完全不同. 由于组成链环涡管的两个涡环之间的链接数为负, 所以这些涡管的螺度密度整体为负. 在演化的过程中, 组成链环的两个结构在自诱导速度下分别向相反的方向螺旋和平动. 由于两个涡环在初始时刻的空间位置非常靠近, 随着流场的演化, 具有不同涡量方向的两个闭合涡管会相互靠近并重合. 在涡管重合处具有非常大的涡量梯度, 导致流场发生一系列的重联与尺度级串过程. 如图6(i)中橙色圆圈所标记的A处, 在这个局部区域具有四个不同涡量方向的涡管积聚在一起, 伴随各自诱导速度的相互排斥, 这四个结构在图6(i)中向四周分散开来. 于是整体涡结构分解为五个子结构, 包括四个分散出去的涡环结构和中间的复杂网状涡结构. 对于分离出去四个涡环结构, 由于图6(i)中的B处两个相反涡量方向的涡管高度靠近, 导致该处在6(i)中产生高度振荡, 使流场结构继续向小尺度转化.

总体上三个涡量方向具有相反手性的链环涡管 $D_{1,2}$, $D_{1,3}$, 和 $D_{1,4}$ 的演化过程类似, 只是其分解出的子涡结构个数不同. 链环涡管 $D_{1,2}$, $D_{1,3}$, 和 $D_{1,4}$ 的第一次解开时间分别为 $t \approx 1.5$, 1 , 和 0.5 . 该时间点和图中的耗散峰值高度吻合. 由于环链解开过程中黏性耗散的剧烈增长, 此后流场能量已大幅度下降, 后

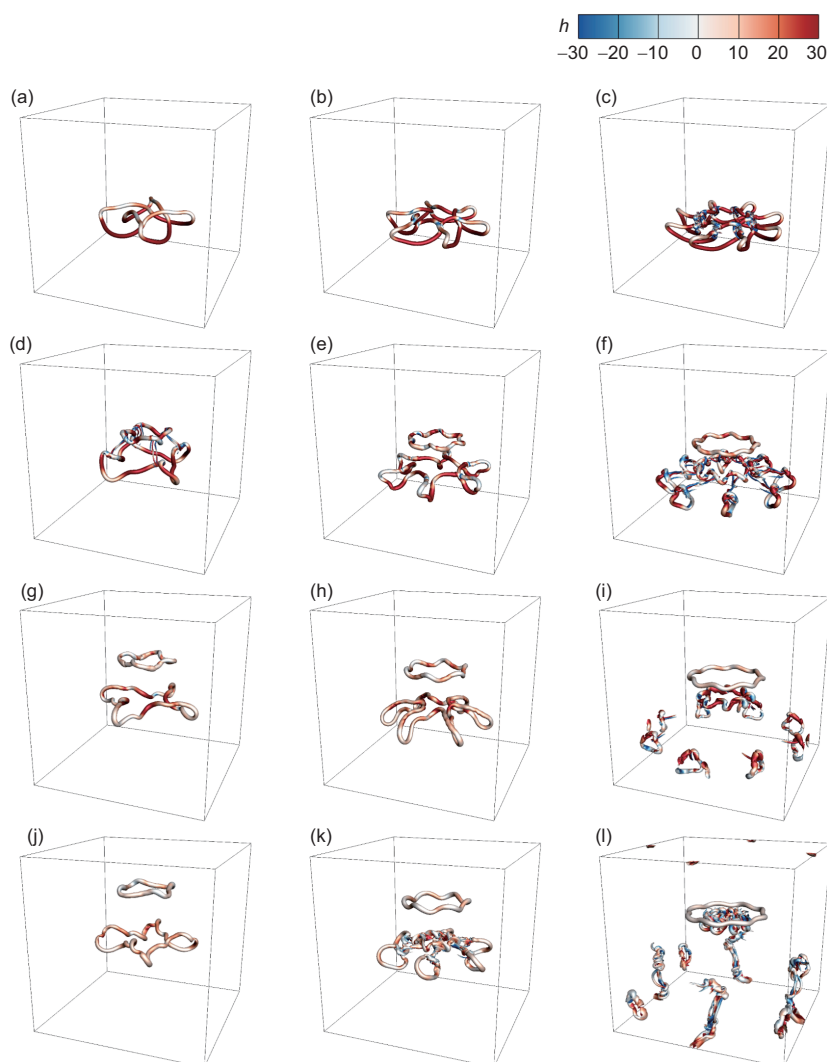


图 5 (网络版彩图)链环涡管在黏性流中演化的涡量强度 $|\omega|$ 等值面. 从左到右三列代表三种不同初始条件, 分别为 $S_{1,2}$, $S_{1,3}$, 和 $S_{1,4}$. 从上到下四行代表四个不同时刻, 并对这四个不同时刻取不同的涡量强度阈值, 分别为 $t = 1$, $|\omega| = 40$, $t = 2$, $|\omega| = 35$, $t = 3$, $|\omega| = 30$, 和 $t = 4$, $|\omega| = 25$. 所有的等值面用螺旋度密度染色

Figure 5 (Color online) Isosurfaces of $|\omega|$ in the temporal evolution of $S_{1,2}$, $S_{1,3}$, and $S_{1,4}$ (from left to right columns) at $t = 1, 2, 3$, and 4 (from upper to bottom rows). All the isosurfaces are color-coded by the helicity density. The isocontour values of $|\omega|$ are 40, 35, 30, 25 at $t = 1, 2, 3$, and 4 , respectively.

续的演化过程对流场统计量的反馈相对不再明显. 此后流场总能量和平均耗散稳定下降, 流场螺度逐渐衰减至零附近.

5 总结

本文利用近期提出的有限厚度涡管一般性构造方法, 构造了六个链环涡管算例. 这些链环涡管

的初始条件是由两个变形的涡环组合而成. 链环涡管的初始螺度满足依赖于涡轴参数方程的解析表达式. 我们验证了该数值构造的链环涡管非常精确, 在 512^3 的数值网格尺度下, 其数值积分计算的螺度与理论表达式的相对误差为 10^{-6} 的量级.

以该链环涡管为初始条件, 我们利用基于伪谱法的直接数值模拟研究了它们在不可压缩黏性流中的演化过程. 这六组涡管算例可以分成两类, 即两

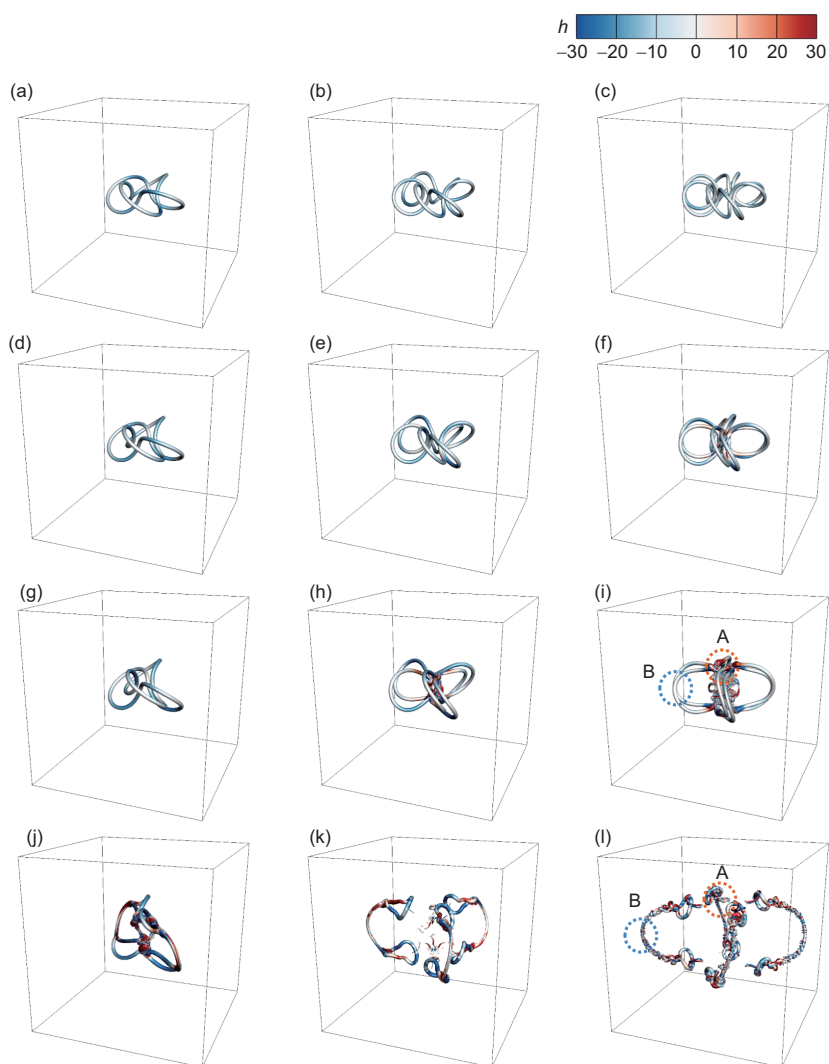


图6 (网络版彩图)链环涡管在黏性流中演化的涡量强度等值面 $|\omega|=40$. 从左到右三列代表三种不同初始条件, 分别为 $D_{1,2}$, $D_{1,3}$, 和 $D_{1,4}$. 从上到下四行代表四个不同时刻, 分别为 $t=0.2, 0.4, 0.6$, 和 1.2 . 所有的等值面用螺度密度染色

Figure 6 (Color online) Isosurfaces of $|\omega|=40$ in the temporal evolution of $D_{1,2}$, $D_{1,3}$, and $D_{1,4}$ (from left to right columns) at $t=0.2, 0.4, 0.6$, and 1.2 (from upper to bottom rows). All the isosurfaces are color-coded by the helicity density.

个初始涡环的涡量方向分别具有相同或相反的手性. 当两个涡环的涡量方向具有相同的手性时, 这些链环涡管的演化过程和环面纽结涡管的演化过程类似. 其相应的动力学过程包括链环涡管的解开、小涡环的分离及不同涡环轴向上的蛙跳穿越等. 因此, 涡管连通性的差异对其演化过程中的动力学现象并没有产生显著的影响. 在整体一致的涡动力学过程下, 这些涡管演化的差异和涡轴螺度是相对应的, 即对涡轴螺度较小的流动, 这些涡环链的解开与

重联碎等涡动力学过程的发生往往滞后. 而涡量方向具有相反手性的链环涡管演化规律则完全不同. 组成链环的两个涡环结构在自诱导速度下分别向不同的方向螺旋和平动. 由于这两个结构在初始时刻间距较小, 具有不同涡量方向的两个闭合涡管在演化中会快速碰撞和重合. 故在涡管重合处产生非常大的涡量梯度, 导致流场发生一系列的重联与尺度级串过程, 从而在短时间内流场变成类似于湍流的混乱状态.

与以往涡环或纽结涡管相比, 本文研究的链环涡管具有更复杂的几何与拓扑特性. 由于构造的链环涡管具有解析的螺度表达式, 因此有望利用该初

始流场进行进一步的螺度解析分析. 此外, 这些链环涡管的构造与演化可以推广至磁流体中的磁通量管研究^[17].

参考文献

- 1 Moreau J J. Constantes d'un filot tourbillonnaire en fluide parfait barotrope. *C R Acad Sci Paris*, 1961, 252: 2810–2812
- 2 Moffatt H K. The degree of knottedness of tangled vortex lines. *J Fluid Mech*, 1969, 35: 117–129
- 3 Berger M A, Field G B. The topological properties of magnetic helicity. *J Fluid Mech*, 1984, 147: 133–148
- 4 Su W D. Helicity Analysis and Differential Geometry (in Chinese). Dissertation for Doctoral Degree. Beijing: Peking University, 1998 [苏卫东. 螺度分析与微分几何. 博士学位论文. 北京: 北京大学, 1998]
- 5 Cantarella J. A general mutual helicity formula. *Proc R Soc London Ser A-Math Phys Eng Sci*, 2000, 456: 2771–2779
- 6 Woltjer L. A theorem on force-free magnetic fields. *Proc Natl Acad Sci USA*, 1958, 44: 489–491
- 7 Chui A Y K, Moffatt H K. The energy and helicity of knotted magnetic flux tubes. *Proc R Soc A-Math Phys Eng Sci*, 1995, 451: 609–629
- 8 Kerr R M. Topology of interacting coiled vortex rings. *J Fluid Mech*, 2018, 854: R2
- 9 Kedia H, Foster D, Dennis M R, et al. Weaving knotted vector fields with tunable helicity. *Phys Rev Lett*, 2016, 117: 274501
- 10 Yan H J, Qin F H, Luo X S. Numerical study on vortex-nozzle interactions (in Chinese). *Sci Sin-Phys Mech Astron*, 2018, 48: 124701 [闫浩杰, 秦丰华, 罗喜胜. 喷管旋涡相互作用的数值研究. 中国科学: 物理学 力学 天文学, 2018, 48: 124701]
- 11 Xiong S, Yang Y. Construction of knotted vortex tubes with the writhe-dependent helicity. *Phys Fluids*, 2019, 31: 047101
- 12 Moffatt H K, Ricca R L. Helicity and the calugareanu invariant. *Proc R Soc A-Math Phys Eng Sci*, 1992, 439: 411–429
- 13 Xiong S, Yang Y. The boundary-constraint method for constructing vortex-surface fields. *J Comput Phys*, 2017, 339: 31–45
- 14 Yang Y, Pullin D I. On Lagrangian and vortex-surface fields for flows with Taylor-Green and Kida-Pelz initial conditions. *J Fluid Mech*, 2010, 661: 446–481
- 15 Rogallo R S. Numerical Experiments in Homogeneous Turbulence. Technical Report. TM81315, NASA, 1981
- 16 Pope S B. Turbulent Flows. Cambridge: Cambridge University Press, 2000. 344–350
- 17 Chen P F. Coronal mass ejections: Models and their observational basis. *Living Rev Sol Phys*, 2011, 8: 1

Evolution and helicity analysis of linked vortex tubes in viscous flows

XIONG Shiyong¹ & YANG Yue^{1,2,3*}

¹*State Key Laboratory for Turbulence and Complex Systems, College of Engineering, Peking University, Beijing 100871, China;*

²*Center for Applied Physics and Technology, Peking University, Beijing 100871, China;*

³*Beijing Innovation Center for Engineering Science and Advanced Technology, Peking University, Beijing 100871, China*

We report the evolution of linked vortex tubes in incompressible viscous flow using the direct numerical simulation. The initial linked vortex tube consists of two deformed vortex rings. The helicity of the constructed vortex tube satisfies an analytical expression depending on the parametric equation of central vortex axis. Thus the linked vortex tubes can be used for further helicity analysis. We find that if vorticity of the two vortex rings has the same chirality, the evolution of linked and knotted torus vortex tubes has similar vortex dynamics. In contrast, for the opposite initial chirality, the vortex rings can have intensive reconnection after a short time due to the large vorticity gradient between the rings, resulting in rapid scale cascade towards a turbulent-like flow state.

vortex tube, helicity analysis, vortex dynamics

PACS: 47.27.-i, 47.27.Eq, 47.27.Nz, 47.40.Ki, 47.85.Gj

doi: [10.1360/SSPMA-2019-0092](https://doi.org/10.1360/SSPMA-2019-0092)